LỜI GIẢI CHI TIẾT 20 CÂU (TỪ CÂU 31 ĐẾN CÂU 50)

Câu 31: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2\left(12-2^x\right)=5-x$ bằng:

A. 2. **B.** 1. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

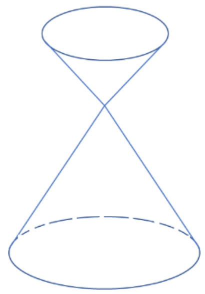
Chọn C

Điều kiện $12-2^x>0$

$$\log_2\left(12-2^x\right)=5-x \Leftrightarrow 12-2^x=\frac{32}{2^x} \Leftrightarrow 2^{2x}-12.2^x+32=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=8\\2^x=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\x=2\end{array}\right.$$

Tích tất cả các nghiệm $3.2=6$.

Câu 32: Một vật trang trí bằng pha lê gồm hai khối nón $(H_1),(H_2)$ xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1,h_1,r_2,h_2 thỏa mãn $r_1=\frac{1}{2}r_2, h_1=\frac{1}{2}h_2$ (hình vẽ).



Biết thể tích của toàn bộ khối pha lê là $100\,\text{cm}^3$. Thể tích của khối (H_1) bằng

A. $\frac{100}{3}\text{cm}^3$. **B.** $25\,\text{cm}^3$. **C.** $\frac{100}{9}\text{cm}^3$. **D.** $50\,\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn C.

Thể tích toàn bộ khối đồ chơi là $V=V_{(H_1)}+V_{(H_2)}=\frac{1}{3}\pi.r_1^{\,2}.h_1+\frac{1}{3}\pi.r_2^{\,2}.h_2$

$$=\frac{1}{3}\pi.\left(r_1\right)^2.\left(h_1\right)+\frac{1}{3}\pi.\left(2r_1\right)^2.\left(2h_1\right)=9.V_{(H_1)}=100\left(\text{cm}^3\right)\Rightarrow V_{(H_1)}=\frac{100}{9}\left(\text{cm}^3\right).$$

Câu 33: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2(1+3\ln x)$ là:

A. $\frac{2x^3}{3}+x^3\ln x+C$. **B.** $x^3\ln x$. **C.** $x^3\ln x+C$. **D.** $x^3+x^3\ln x+C$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $\begin{cases}u=1+3\ln x\\ \mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{3}{x}\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^3}{3}\end{cases}$

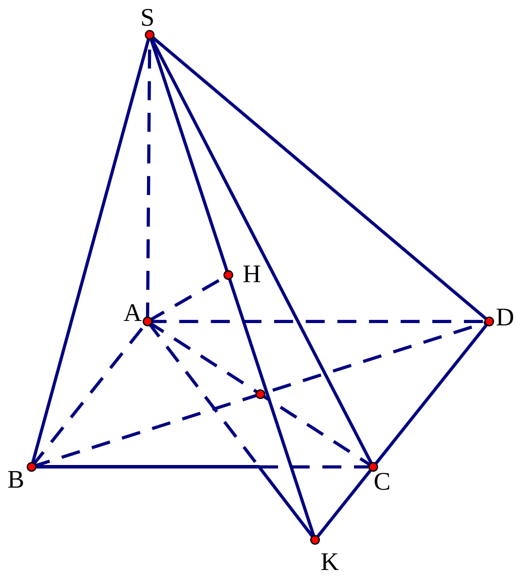
$$\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}(1+3\ln x)-\int x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}(1+3\ln x)-\frac{x^3}{3}+C=x^3\ln x+C.$$

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $ADC=30^\circ$, $AB=a$, $AD=2a$, $SA=a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn C.



Ta có $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD)$, suy ra $d(B,(SCD)) = d(A,(SCD))$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $AK \perp CD$ tại K khi đó tam giác AKD vuông tại K và có $ADK = 30°$ $\Rightarrow AK = a$.

Trong mặt phẳng (SAK), kẻ $AH \perp SK$ tại H $\Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A,(SCD)) = AH$.

Do $SA = AK = a$ nên tam giác SAK vuông cân tại A suy ra $AH = \dfrac{1}{2}SK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(B,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$. Hình chiếu của d trên (P) là đường thẳng d'. Trong các điểm sau điểm nào thuộc đường thẳng d'

A. $M(2;5;-4)$. **B.** $N(1;-1;3)$. **C.** $P(1;3;-1)$. **D.** $Q(2;7;-6)$.

Lời giải

Chọn A

+ Véc tơ chỉ phương của d và véc tơ pháp tuyến của (P) là $\begin{cases} \vec{u}_d = (1;2;-1) \\ \vec{n}_{(P)} = (1;1;1) \end{cases}$.

+ Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

Gọi $A = (P) \cap d$, khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow A(1;1;1)$.

+ Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với (P). Khi đó (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)} = \left[\vec{u}_d, \vec{n}_{(P)}\right] = (3;-2;-1)$.

+ Đường thẳng Δ là hình chiếu vuông góc của d lên (P) chính là giao tuyến của (P) và (Q). Suy ra Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \left[\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}\right] = (1;4;-5)$.

+ Vậy hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng qua $A(1;1;1)$ nhận $\vec{u} = (1;4;-5)$ làm véc tơ chỉ phương có phương trình là $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-1}{-5}$. Thay tọa độ các điểm ở đáp án vào ta được $M(2;5;-4)$ thỏa mãn.

Câu 36: Cho hàm số $y=x^3+3x^2+(m+1)x+4m$ (1) là tham số. Tập hợp các giá trị thực của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ là:

A. $(-\infty;2]$. **B.** $(-\infty;-10]$. **C.** $\left(-\frac{1}{4};+\infty\right)$. **D.** $(-\infty;-10)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có:

$y'=3x^2+6x+m+1$

Hàm số (1) nghịch biến trên $(-1;1)$ khi và chỉ khi $y'\le 0\ \ \forall x\in(-1;1)$

$\Leftrightarrow 3x^2+6x+m+1\le 0\ \forall x\in(-1;1) \Leftrightarrow m\le -3x^2-6x-1\ \forall x\in(-1;1)\quad (*)$

Xét $g(x)=-3x^2-6x-1, x\in(-1;1)$.

Do $g'(x)=-6x-6<0, \forall x\in(-1;1)$ nên $g(x)>g(1)=10, \forall x\in(-1;1)$

Vậy $(*) \Leftrightarrow m\le -10.$

Câu 37: Cho số phức z thỏa mãn $(z-2+i)(\overline{z}-2-i)=25$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w=2\overline{z}-2+3i$ là đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính c. Giá trị của $a.b.c$ bằng

A. 17. **B.** -17. **C.** 100. **D.** -100.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ và $w=x+yi$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

$(z-2+i)(\overline{z}-2-i)=25 \Leftrightarrow [a-2+(b+1)i][a-2-(b+1)i]=25$

$\Leftrightarrow (a-2)^2+(b+1)^2=25\ (1)$

Giả sử $w=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Theo giả thiết: $w=2\overline{z}-2+3i \Leftrightarrow x+yi=2(a-bi)-2+3i \Leftrightarrow x+yi=2a-2+(3-2b)i$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2a-2 \\ y=3-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{x+2}{2} \\ b=\dfrac{3-y}{2} \end{cases} (2).$$

Thay (2) vào (1) ta được: $\left(\frac{x+2}{2}-2\right)^2+\left(\frac{3-y}{2}+1\right)^2=25 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-5)^2=100$.

Suy ra, tập hợp điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn tâm $I(2;5)$ và bán kính $R=10$.

Vậy $a.b.c=100$.

Câu 38: Cho $\int_1^2 \frac{2x-1}{4x^2+4x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\ln a-\ln b)+c$, với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+15c$ bằng

A. 15. **B.** -15. **C.** 14. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_1^2 \frac{2x-1}{4x^2+4x+1}\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{2x-1}{(2x+1)^2}\mathrm{d}x$

Đặt $t=2x+1\Rightarrow\begin{cases}2x=t-1\\ \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x\end{cases}$. Đổi cận $t=2x+1\Rightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow t=3\\ x=2\Rightarrow t=5\end{cases}$. Khi đó ta có

$$\int\limits_1^2\frac{2x-1}{(2x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\limits_3^5\frac{t-2}{2t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\int\limits_3^5\frac{\mathrm{d}t}{t}-\int\limits_3^5\frac{2}{t^2}\mathrm{d}t\right)=\left.\left(\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{1}{t}\right)\right|_3^5$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 3)-\frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow a=5,b=3,c=-\frac{2}{15}\Rightarrow 3a+b+15c=3.5+3-15.\frac{2}{15}=16.$$

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x)<m-\ln x$ đúng với mọi $x\in(2;3)$ khi và chỉ khi

A. $m\geq f(2)+\ln 2.$

B. $m>f(3)+\ln 3.$

C. $m\geq f(3)+\ln 3.$

D. $m>f(2)+\ln 2.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x)<m-\ln x,\forall x\in(2;3)\Leftrightarrow f(x)+\ln x<m\ \ \forall x\in(2;3)$ (*).

Xét hàm số $g(x)=f(x)+\ln x$

Ta có: $g'(x)=f'(x)+\dfrac{1}{x}$.

Ta thấy với $\forall x\in(2;3)$ thì $f'(x)>0$, $\dfrac{1}{x}>0$ nên $g'(x)=f'(x)+\dfrac{1}{x}>0$, $\forall x\in(2;3)$.

Bảng biến thiên

x	2		3
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$g(2)$	$\nearrow$	$g(3)$

Từ bảng biến thiên ta có $m\geq g(3)\Leftrightarrow m\geq f(3)+\ln 3$.

Câu 40: Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có 5 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 5 học sinh trường X và 5 học sinh trường Y vào bàn nói trên. Tính xác suất để bất cứ 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường với nhau.

A. $\dfrac{2}{63}$.

B. $\dfrac{4}{63}$.

C. $\dfrac{8}{63}$.

D. $\dfrac{5}{63}$.

Lời giải

Chọn C

A_1	B_1	C_1	D_1	E_1
A_2	B_2	C_2	D_2	E_2

Mỗi cách xếp 10 học sinh vào 10 chiếc ghế là một hoán vị của 10 phần tử, vì vậy số phần tử của không gian mẫu là: $|\Omega| = 10! = 3628800$.

Gọi A là biến cố: "bất cứ 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường với nhau".

— Xếp bạn thứ nhất vào ghế A_1 sẽ có 10 cách chọn.

— Tiếp theo sẽ xếp 1 bạn vào ghế A_2, bạn này phải khác trường với bạn ngồi ghế A_1 nên sẽ có 5 cách chọn

— Tiếp tục xếp 1 trong 8 bạn còn lại vào ghế B_1 sẽ có 8 cách chọn. Xếp bạn vào ghế B_2 sẽ có 4 cách chọn

— Tiếp tục xếp 1 trong 6 bạn còn lại vào ghế C_1 sẽ có 6 cách chọn. Xếp bạn vào ghế C_2 sẽ có 3 cách chọn

— Tiếp tục xếp 1 trong 4 bạn còn lại vào ghế D_1 sẽ có 4 cách chọn. Xếp bạn vào ghế D_2 sẽ có 2 cách chọn

— Sau đó xếp 1 trong 2 bạn còn lại vào ghế E_1 sẽ có 2 cách chọn. Bạn cuối cùng chỉ còn 1 cách lựa chọn ngồi ghế E_2.

Số phần tử của A là: $|A| = 10.5.8.4.6.3.4.2.2.1 = 460800$

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{460800}{3628800} = \dfrac{8}{63}$.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): 3x-3y-2z-12=0$. Gọi $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+c$.

A. 3. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -3.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có: $\overrightarrow{IA}=(1-x;4-y;5-z)$, $\overrightarrow{IB}=(3-x;4-y;-z)$

và $3\overrightarrow{IC}=(6-3x;-3-3y;-3z)$.

Từ ta có hệ phương trình: $\begin{cases}1-x+3-x+6-3x=0\\4-y+4-y-3-3y=0\\5-z-z-3z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases} \Rightarrow I(2;1;1)$.

Khi đó: $MA^2=\overrightarrow{MA}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=MI^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+IA^2$.

$MB^2=\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=MI^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+IB^2$.

$3MC^2=3\overrightarrow{MC}^2=3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2=3\left(MI^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC}+IC^2\right)$.

Do đó: $S=MA^2+MB^2+3MC^2=5MI^2+IA^2+IB^2+3IC^2$.

Do $IA^2+IB^2+3IC^2$ không đổi nên S đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI đạt giá trị nhỏ nhất. Tức là M là hình chiếu của I lên mặt phẳng $(P): 3x-3y-2z-12=0$.

IM có một Vectơ chỉ phương là $\vec{n}=(3;-3;-2)$.

Phương trình tham số của IM là: $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-3t \\ z = 1-2t \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$.

Gọi $M(2+3t;1-3t;1-2t) \in (P)$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Khi đó: $3(2+3t)-3(1-3t)-2(1-2t)-12=0 \Leftrightarrow 22t-11=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$.

Suy ra: $M\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2};0\right)$. Vậy $a+b+c=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=3$.

Câu 42: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+1-3i|=3\sqrt{2}$ và $(z+2i)^2$ là số thuần ảo?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$, khi đó

$|z+1-3i|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=18 \quad (1)$.

$(z+2i)^2=\left[x+(y+2)i\right]^2=x^2-(y+2)^2+2x(y+2)i$.

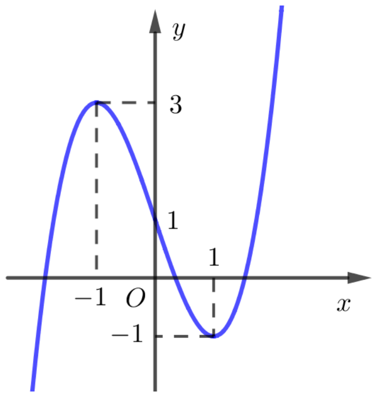
Theo giả thiết ta có $x^2-(y+2)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y+2 \\ x=-(y+2) \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $x=y+2$ thay vào (1) ta được phương trình $2y^2=0$ và giải ra nghiệm $y=0$, ta được 1 số phức $z_1=2$.

Trường hợp 2: $x=-(y+2)$ thay vào (1) ta được phương trình $2y^2-4y-8=0$ và giải ra ta được $\left[\begin{array}{l} y=1+\sqrt{5} \\ y=1-\sqrt{5} \end{array}\right.$, ta được 2 số phức $\left[\begin{array}{l} z_2=-3-\sqrt{5}+\left(1+\sqrt{5}\right)i \\ z_3=-3+\sqrt{5}+\left(1-\sqrt{5}\right)i \end{array}\right.$.

Vậy có 3 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(\sin x))=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$.



A. 1. **B.** 2.
C. 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=f(\sin x)$, do $x\in(0;\pi) \Rightarrow \sin x\in(0;1] \Rightarrow t\in[-1;1)$.

Do đó phương trình $f(f(\sin x))=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[-1;1)$.

Quan sát đồ thị đã cho: yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\in(-1;3]$.

Câu 44: Ông A cần mua nhà ở nhưng số tiền của ông không đủ để mua nhà ở, ông đi vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất ưu đãi là 9%/năm. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một năm kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một năm, số tiền hoàn nợ ở mỗi năm là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng 10 năm kể từ ngày vay.

Biết rằng mỗi năm ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của năm đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. $155,820$ triệu đồng. **B.** $146,947$ triệu đồng.

C. $166,8$ triệu đồng. **D.** $236,736$ triệu đồng.

Lời giải

Chọn A.

Gọi số tiền vay ban đầu là M, số tiền hoàn nợ mỗi năm là m, lãi suất một năm là r.

Hết năm thứ nhất, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là $M+Mr=M(1+r)$.

Ngay sau đó ông A hoàn nợ số tiền m nên số tiền để tính lãi cho năm thứ hai là $M(1+r)-m$.

Do đó hết năm thứ hai, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$\left[M(1+r)-m\right](1+r)=M(1+r)^2-m(1+r)$.

Ngay sau đó ông A lại hoàn nợ số tiền m nên số tiền để tính lãi cho năm thứ ba là

$M(1+r)^2-m(1+r)-m$.

Do đó hết năm thứ ba, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$\left[M(1+r)^2-m(1+r)-m\right](1+r)=M(1+r)^3-m(1+r)^2-m(1+r)-m$.

Cứ tiếp tục lập luận như vậy ta thấy sau năm thứ n, $n\geq 2$, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$M(1+r)^n-m(1+r)^{n-1}-m(1+r)^{n-2}-\ldots-m(1+r)-m=M(1+r)^n-\frac{m\left[(1+r)^n-1\right]}{r}.$$

Sau năm thứ n trả hết nợ thì ta có

$$M(1+r)^n-\frac{m\left[(1+r)^n-1\right]}{r}=0\Leftrightarrow m=\frac{M(1+r)^n r}{(1+r)^n-1}.$$

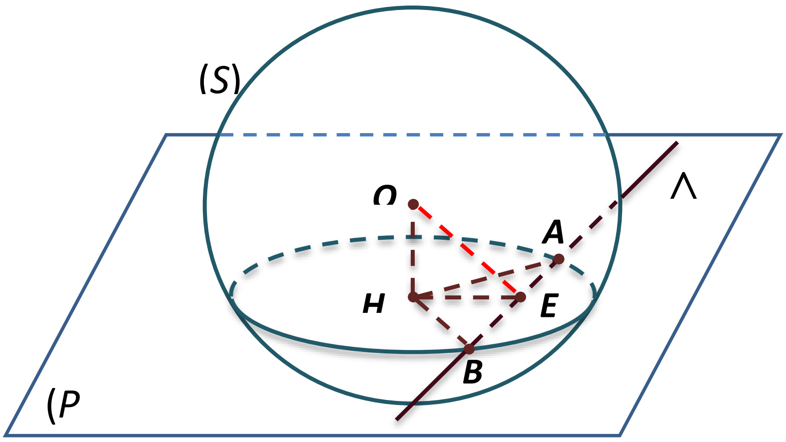
Thay số với $M=1.000.000.000$, $r=9\%$, $n=10$ ta được $m\approx 155,820$ (triệu đồng).

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;2)$, mặt phẳng $(P): x+y+z-4=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=9$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=2+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=2-1 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=1+t \\ z=2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=2-t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=3$.

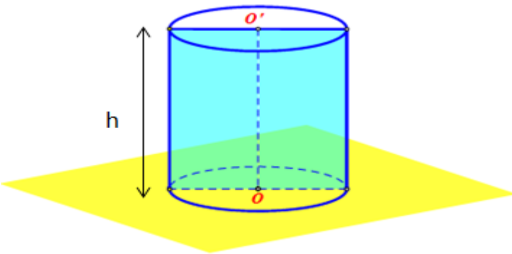
$OE=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}<R\Rightarrow$ điểm E nằm trong mặt cầu (S).

Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (P), A và B là hai giao điểm của Δ với (S).

Khi đó, AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB\perp HE$, mà $AB\perp OH$ nên $AB\perp(HOE)\Rightarrow AB\perp OE$.

Suy ra: $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{EO}\right]=(-1;1;0)$. Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases}x=1-t\\y=1+t\\z=2\end{cases}$.

Câu 46: Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ (như hình vẽ) có thể tích V nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và gấp $1{,}5$ lần so với giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi chiều cao của thùng là h và bán kính đáy là r. Tính tỉ số $\frac{h}{r}$ sao cho chi phí vật liệu sản xuất thùng là nhỏ nhất?



A. $\frac{h}{r}=2.$ **B.** $\frac{h}{r}=\sqrt{3}.$ **C.** $\frac{h}{r}=3.$ **D.** $\frac{h}{r}=2\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn C

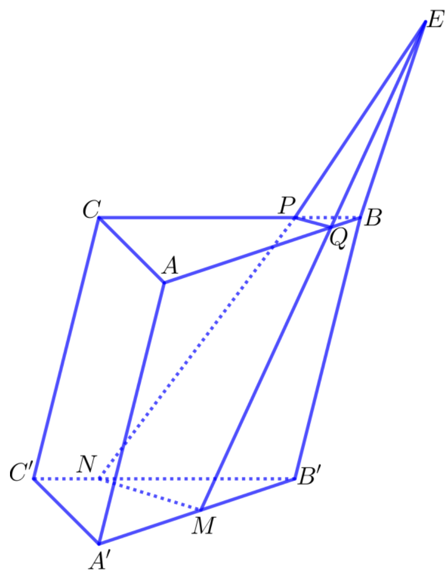
Gọi giá của vật liệu làm mặt xung quanh là $x,(x>0)$ (cho mỗi đơn vị diện tích), suy ra giá của vật liệu làm đáy và nắp là $1{,}5x$.

Tổng chi phí vật liệu sản xuất thùng:

$$T=3x\pi r^2+2x\pi rh=\pi x\left(3r^2+\frac{2V}{\pi r}\right)=\pi x\left(3r^2+\frac{V}{\pi r}+\frac{V}{\pi r}\right)\ge \pi x.\left(3\sqrt[3]{3r^2.\frac{V}{\pi r}.\frac{V}{\pi r}}\right)=3\pi x.\sqrt[3]{\frac{3V^2}{\pi^2}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{V}{\pi r}=3r^2\Leftrightarrow\frac{\pi r^2h}{\pi r}=3r^2\Leftrightarrow h=3r\Leftrightarrow\frac{h}{r}=3.$

Câu 47: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 6. Gọi M, N và P lần lượt các điểm nằm trên cạnh $A'B'$, $B'C'$ và BC sao cho M là trung điểm của $A'B'$; $B'N=\frac{3}{4}B'C'$ và $BP=\frac{1}{4}BC$. Đường thẳng NP cắt đường thẳng BB' tại E và đường thẳng EM cắt đường thẳng AB tại Q. Thể tích khối đa diện lồi $AQPCA'MNC$ bằng



A. $\frac{59}{12}$. **B.** $\frac{23}{6}$.

C. $\frac{59}{6}$. **D.** $\frac{19}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Theo Thalets ta có: $\frac{EB}{EB'}=\frac{EQ}{EM}=\frac{EP}{EN}=\frac{BP}{B'N}=\frac{1}{3}$. Suy ra $d\left(E,(A'B'C')\right)=\frac{3}{2}d\left(B,(A'B'C')\right)$.

Mặt khác: $\frac{S_{B'MN}}{S_{A'B'C'}}=\frac{B'M}{B'A'}.\frac{B'N}{B'C'}=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$.

Lại có: $V_{E.MB'N}=\frac{1}{3}d\left(E,(MB'N)\right).S_{MB'N}=\frac{1}{3}.\frac{3}{2}d\left(B,(A'B'C')\right).\frac{3}{8}S_{A'B'C'}=\frac{3}{8}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{3}{16}.6=\frac{9}{8}$.

Có: $\frac{V_{E.QPB}}{V_{E.MB'N}}=\left(\frac{EB}{EB'}\right)^3=\frac{1}{27}$.

Suy ra: $V_{BQP.B'MN}=V_{E.MB'N}-V_{E.BQP}=V_{E.MB'N}-\frac{1}{27}V_{E.MB'N}=\frac{26}{27}V_{E.MB'N}$.

Vậy $V_{AQPCAMNC}=V_{ABC.A'B'C'}-V_{BQP.B'MN}=6-\frac{26}{27}.\frac{9}{8}=\frac{59}{12}$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(-x+2)+x^3+3x^2-9x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-2;1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=-3f'(-x+2)+3x^2+6x-9=3\left[-f'(-x+2)+(x^2+2x-3)\right]$. Xét dấu của $f'(-x+1)$ và x^2+2x-3 ta có bảng:

x	$-\infty$		-3		0		1		3		$+\infty$
$-f'(-x+2)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
x^2+2x-3		$+$	0		$-$		0	$+$			
y'		$+$	0		$-$		0	$+$	chưa xác định		

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$. Do đó ta chọn **D**

Câu 49: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\frac{1}{5}m^2x^5-\frac{1}{3}mx^3+10x^2-(m^2-m-20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** -2. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=m^2x^4-mx^2+20x-(m^2-m-20)\Leftrightarrow f'(x)=m^2(x^4-1)-m(x^2-1)+20(x+1)$

$\Leftrightarrow f'(x)=(x+1)\left[m^2(x^3-x^2+x-1)-m(x-1)+20\right]=(x+1).g(x)$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

- Nếu $x=-1$ không phải là nghiệm của $g(x)$ thì $f(x)$ sẽ đổi dấu khi x đi qua $x=-1$. Do đó điều kiện cần để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $x=-1$ phải là nghiệm của $g(x)=0$

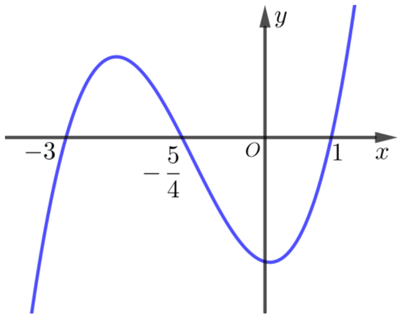
$\Rightarrow -4m^2+2m+20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$.

- Với $m=-2$ thì $f'(x)=(x+1)^2(4x^2-8x+14)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$, do đó $m=-2$ thỏa mãn.

- Với $m=\dfrac{5}{2}$ thì $f'(x)=\dfrac{1}{4}(x+1)^2(25x^2-50x+60)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$, do đó $m=\dfrac{5}{2}$ thỏa mãn.

Vậy $S=\left\{\dfrac{5}{2};-2\right\}$, tổng các phần tử của S bằng $\dfrac{5}{2}-2=\dfrac{1}{2}$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+m$, (với $a,b,c,d,m\in\mathbb{R}$). Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới: Tập nghiệm của phương trình $f(x)=m$ có số phần tử là:



A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Ta có $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ (1).

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=a(x-1)(4x+5)(x+3)=4ax^3+13ax^2-2ax-15a$ (2) và $a\neq 0$.

Từ (1) và (2) suy ra $b=\dfrac{13}{3}a$, $c=-a$ và $d=-15a$.

Khi đó: $f(x)=m \Leftrightarrow ax^4+bx^3+cx^2+dx=0 \Leftrightarrow a\left(x^4+\dfrac{13}{3}x^3-x^2-15x\right)=0$

$\Leftrightarrow 3x^4+13x^3-3x^2-45x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{5}{3} \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x)=m$ là $S=\left\{\dfrac{5}{3};0;-3\right\}$.

Cách 2: Từ đồ thị ta có $a\neq 0$.

$f(x)=m \Leftrightarrow ax^4+bx^3+cx^2+dx+m=m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ ax^3+bx^2+cx+d=0\ (2) \end{array}\right.$.

Ta có $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ có 3 nghiệm $x_1=-3; x_2=-\dfrac{5}{4}; x_3=1$.

Áp dụng định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{3b}{4a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\dfrac{2c}{4a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{4a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{13}{4}=-\dfrac{3b}{4a} \\ -\dfrac{1}{2}=\dfrac{2c}{4a} \\ \dfrac{15}{4}=-\dfrac{d}{4a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{13}{3}a \\ c=-a \\ d=-15a \end{cases}$.

Thế vào (2) ta có: $a\left(x^3+\dfrac{13}{3}x^2-x-15\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x)=m$ là $S=\left\{\dfrac{5}{3};0;-3\right\}$.